

Reševanje problemov s hevrističnim preiskovanjem

Ljupčo Todorovski

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko
Institut Jožef Stefan, Odsek za tehnologije znanja (E8)

Februar 2022

Pregled predavanja

- 1 Reševanje problemov s preiskovanjem
- 2 Preiskovalni algoritmi
- 3 Hevristično preiskovanje

Prostor stanj

Četverica $\langle S, P, s_0, S_k \rangle$

S števna množica stanj, možne ali delne rešitve

$P : S \rightarrow 2^{S \times \mathbb{R}}$ funkcija prehodov med stanji

$s_0 \in S$ začetno stanje

$S_k \subseteq S$ množica končnih stanj, rešitve problema

Funkcija prehodov

Za podano stanje s določi množico dvojic $\langle t, c \rangle$

t naslednje stanje prehoda

c je cena prehoda

Rešitev problema

Zaporedje stanj $r = s_0, s_1, \dots, s_n \in S_k$

- Za vse dvojice zaporednih členov s_{i-1} in s_i velja $\langle s_i, c_i \rangle \in P(s_{i-1})$
- **Cena rešitve** je vsota cen prehodov, $\text{cena}(r) = \sum_{i=1}^n c_i$
- r je pot od začetnega stanja do enega izmed končnih stanj
- **Optimalna rešitev** je zaporedje r , ki ima najmanjšo možno ceno

Dosegljivost v prostoru stanj

Funkcija prehodov zagotavlja dosegljivost

- Za vsako stanje $s \in S$ obstaja zaporedje stanj $s_0, s_1, \dots, s_n = s$
- Ker za vse dvojico s_{i-1} in s_i velja $\langle s_i, c_i \rangle \in P(s_{i-1})$

Zgled: reševanje diofantskih enačb

$$a_x x + a_y y = a$$

$$S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$P(\langle x, y \rangle) = \{ \\
\langle x + 1, y \rangle, 1), (\langle x, y + 1 \rangle, 1) \\
\langle x - 1, y \rangle, 1), (\langle x, y - 1 \rangle, 1) \\
\}$$

$$s_0 = \langle 0, 0 \rangle$$

$$S_K = \{ \langle x, y \rangle : a_x x + a_y y = a \}$$

Vaje

Dokaži, da zgoraj definirana funkcija prehodov v prostoru stanj za reševanje diofantske enačbe zagotavlja dosegljivost.

V prostoru stanj za reševanje linearnih diofantskih enačb izpelji formulo, ki bi vsoto cen prehodov iz začetnega stanja $s_0 = \langle 0, 0 \rangle$ v stanje $s = (x, y)$, izračunala na osnovi vrednosti x in y .

Posploši definicijo prostora stanj za reševanje linearne diofantske enačbe z dvema neznankama, tako da lahko rešujemo enačbe s poljubnim številom neznank.

Stopnja razvejanja in globina prostora stanj

Stopnja razvejanja b

$$\max_{s \in S} |P(s)|$$

Maksimalno število možnih prehodov iz kateregakoli stanja $s \in S$.

Globina d

Najmanjše število prehodov potrebnih, da iz s_0 pridemo v eno izmed končnih stanj iz S_k .

Vaje

Kakšna je vrednost stopnje razvejanja prostora stanj za reševanje linearnih diofantskih enačb? Kakšna je globina d tega prostora stanj? Ali lahko d ocenimo na osnovi konstantnih parametrov diofantske enačbe?

Ali lahko definirani prostor stanj uporabimo za reševanje nelinearnih diofantskih enačb?

Preiskovalno drevo

- Vozlišča so stanja iz S
- Korensko vozlišče ustreza začetnemu stanju s_0
- Povezave, ki izhajajo iz vozlišča s ustrezajo prehodom iz $P(s)$
 - Otroci s so stanja iz množice $\{t : \exists c_t : \langle t, c_t \rangle \in P(s)\}$
 - Cena povezave v drevesu $\langle s, t \rangle$ je enaka ceni tega prehoda c_t
- Vozlišča na veji od korena do lista ustrezajo različnim stanjem

Preiskovalna fronta, globina in funkcija g

Preiskovalna fronta

Množica končnih vozlišč (listov) v preiskovalnem drevesu.

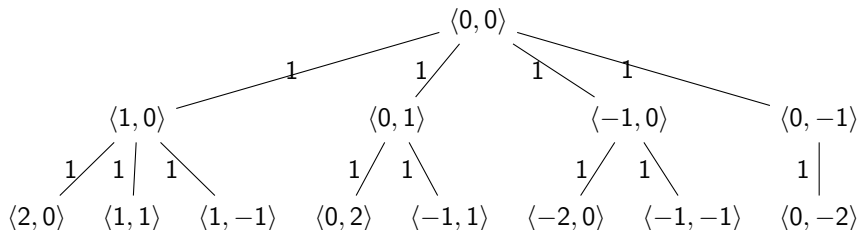
Globina vozlišča s v preiskovalnem drevesu

Število povezav na veji od s do korenskega vozlišča s_0 .

Funkcija $g : S \rightarrow \mathbb{R}$

Za podano vozlišče s v preiskovalnem drevesu vrne vsoto cen vseh prehodov na veji od s do korenskega vozlišča s_0 .

Primer preiskovalnega drevesa in vaja



Vaja

Določi veje in naslednike vozlišča $\langle 1, 1 \rangle$. Nato naredi isto za vozlišče $\langle 2, 0 \rangle$. Kako bi se rezultat spremenil, če bi vozlišči obravnavali v obratnem vrstnem redu? Ali bi se spremenila tudi preiskovalna fronta?

Splošen preiskovalni algoritem

Neskončna zanka

- **Izberi** vozlišče s iz preiskovalne fronte F , če je F prazna, končaj
- Če velja $s \in S_K$, končaj in vrni rešitev
- Z uporabo funkcije P razvejaj naslednike vozlišča s

Neinformirana preiskovalna algoritma

Preiskovanje v globino

- Izberi najbolj globoko vozlišče iz preiskovalne fronte
- **Popolnost** zagotovljena, le če je S končna množica
- Prostorska zahtevnost linearna $O(bm)$, časovna eksponentna $O(b^d)$

Preiskovanje v širino

- Izberi najbolj globoko vozlišče iz preiskovalne fronte
- **Popolnost** brezpogojno zagotovljena
- Prostorska in časovna zahtevnost eksponentni, $O(b^d)$

Vaja

Na osnovi ponazoritve delovanja algoritmov preiskovanja iz prejšnjega zgleda premislite in odgovorite na naslednja dva vprašanja. Zakaj je prostorska zahtevnost preiskovanja v globino manjša od prostorske zahtevnosti preiskovanja v širino? Zakaj imata oba algoritma enako časovno zahtevnost?

Algoritem najprej najboljši

Preiskovanje najprej najboljši

- Izberi vozlišče s z najmanjšo vrednostjo $g(s)$
- **Optimlanost** brezpogojno zagotovljena
- Prostorska in časovna zahtevnost eksponentni, $O(b^d)$

Vaja

V prostoru stanj za reševanje linearnih diofantskih enačb so vse cene prehodov enake 1. Kaj lahko v tem primeru povemo o razmerju med preiskovalnim algoritmom najprej najboljši in preiskovanjem v širino?

Vsevedna in hevristična funkcija

Hevristična funkcija $h : S \rightarrow \mathbb{R}$

Za podano stanje s *izračuna oceno cene* najcenejše poti od stanja s do enega izmed končnih stanj $s_k \in S_k$.

Vsevedna funkcija $h^* : S \rightarrow \mathbb{R}$

Za podano stanje s *izračuna ceno* najcenejše poti od stanja s do enega izmed končnih stanj $s_k \in S_k$.

Sprejemljivost in algoritem A^*

Sprejemljivost hevristične funkcije h

- Če za vsako stanje $s \in S$ velja $h(s) \leq h^*(s)$
- Sprejemljivost h zagotavlja optimalnost A^*

Vaja

Pokaži, da hevristična funkcija $h(\langle x, y \rangle) = |a - (a_x x + a_y y)|$ ni sprejemljiva: poišči protiprimer stanja s , za katerega lahko dokažeš, da velja $h(s) > h^*(s)$. Popravi funkcijo h tako, da bo sprejemljiva.